

MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS DE EL SALVADOR

UNIDAD DE INVESTIGACION Y DESARROLLO VIAL

Distribución de rotaciones - Un nuevo método para el análisis de marcos de varios pisos.

Jorge A. Rodríguez Deras, M.Sc., ¹
Director
Centro de Investigaciones Geotécnicas

¹ Laboró en el Centro de Investigaciones Geotécnicas (CIG) del Ministerio de Obras Públicas hasta el mes de febrero de 2001.

Resumen.

El análisis de marcos de varios pisos requiere la manipulación de un elevado número de variables por tratarse de estructuras altamente hiperestáticas. En la literatura técnica se suelen encontrar diferentes procedimientos para efectuar dicho análisis, de los cuales los métodos de aproximaciones sucesivas gozan de gran popularidad en el caso de utilizarse un procedimiento manual para resolver las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad. Sin embargo, con la accesibilidad a computadoras digitales, los procedimientos matriciales reducen la carga operacional al analista de estructuras aunque normalmente requieren la utilización de programas más o menos sofisticados y el empleo de computadoras con elevada capacidad de memoria.

Entre las ventajas que ofrece el procedimiento que se presenta a continuación -- desarrollado por quien aquí escribe -- sobre los métodos de aproximaciones sucesivas como los de Cross, Kani o Takabeya, se puede destacar que este método requiere solamente una iteración por nudo -- exterior o interior -- en lugar de cuatro iteraciones por nudo interior, como por ejemplo en el Método de Kani.

La determinación del desplazamiento lateral relativo de un piso requiere -- con el Método de Kani -- efectuar iteraciones para cada columna, no así con el método que se presenta y que únicamente requiere una iteración por piso, independientemente de la cantidad de columnas que posea el piso en cuestión.

Este método también se puede aplicar al análisis marcos con estructuración irregular, acoplados a muros (se incluye la deformación por cortante en el muro), con miembros diagonales (se incluye la deformación por carga axial en las diagonales), y también a marcos con miembros de sección variable entre los nudos - ya sean vigas o columnas (cartelas simétricas o asimétricas); aplicaciones por demás interesantes y útiles, y que además no son normalmente cubiertas por otros métodos de solución manual.

Las ecuaciones que se obtienen y constituyen la Ecuación de Nudo y la Ecuación de Piso, sugieren de una manera clara y directa el proceso iterativo que ha sido diseñado para resolverlas.

Miembros de Sección Constante y Columnas de Igual Altura en Cada Piso. Los marcos estructurales rara vez se encuentran apoyados de tal manera que sus nudos no sufran desplazamientos y en particular desplazamientos laterales.

El desplazamiento lateral de un marco puede ocurrir por varias causas, entre las que se puede mencionar la aplicación de cargas laterales -- sismo o viento -- y aún bajo cargas gravitacionales tales como el peso propio y la carga viva; este tipo de desplazamiento puede ocurrir debido a la asimetría de las cargas verticales, asimetría geométrica del marco en sí, o asimetría de rigideces de los miembros del marco.

Utilizando como punto de partida las ecuaciones Pendiente-Deflexión en su forma general, y en las que además se incluye el efecto del desplazamiento horizontal relativo que ocurre entre los extremos de cada columna ij, se tiene para las columnas,

$$M_{ij} = \alpha_{ij} \theta_{ij} + \beta_{ji} \theta_{ji} - Y_{ij} \Phi_P \quad (1)$$

y para las vigas,

$$M_{ij} = \alpha_{ij} \theta_{ij} + \beta_{ji} \theta_{ji} + M_{oij} \quad (2)$$

Se puede demostrar que para miembros rectilíneos de sección constante o variable,

$$Y_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ji} \quad (3)$$

en las que además se ha definido,

$$\Phi_{ij} = \delta_{ij} / L_{ij} \quad (4)$$

Analizando ahora un nudo cualquiera al que llegan vigas y columnas se tiene, aplicando las expresiones (1) y (2), y observando que para que el nudo i se encuentre en equilibrio se requiere entonces que,

$$\theta_i = FN_i [\beta_{ji} \theta_{ji} - \sum Y_{ij} \Phi_P] + RIN_i \quad (5)$$

en la que se ha utilizado como Factor de Nudo i,

$$FN_i = -1 / \sum \alpha_{ij} \quad (6)$$

Rotación Inicial de Nudo i,

$$RIN_i = -\sum M_i / \sum \alpha_{ij} \quad (7)$$

o lo que es lo mismo,

$$RIN_i = FN_i \sum M_{oij} \quad (8)$$

Como puede notarse, una vez que se tengan aproximaciones para la rotación del nudo j y la rotación del piso para los diferentes miembros que concurren en el nudo i, se podrá contar

entonces con aproximaciones para la rotación del nudo i , por lo que se necesita una expresión para estimar valores de la rotación del piso p .

Considerando ahora el equilibrio de un piso sometido a un cortante total V_p , se tiene, al considerar los momentos y cortantes que se generan en los extremos de cada columna del piso, la expresión que determina el cortante en cada extremo de cada columna y que se puede escribir,

$$H_{ij} = [\theta_{ij} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) + \theta_{ji} (\alpha_{ji} + \beta_{ji}) - 2\gamma_{ij} \Phi_{ij}] / L_{ij}$$

por lo que al sumar los cortantes de todas las columnas del piso p , y considerando el equilibrio del piso, así como también la siguiente propiedad de las ecuaciones Pendiente Deflexión,

$$\beta_{ij} = \beta_{ji} \quad (9)$$

se puede entonces escribir la ecuación de piso en forma compacta,

$$\Phi_p = FP_p [\Sigma \gamma_{ij} (\theta_{ij} + \theta_{ji}) + RIP_p] \quad (10)$$

que permite determinar la rotación de piso en función de las rotaciones de nudo, superior e inferior de cada columna del piso en cuestión, y en la que además se han definido las constantes siguientes:

Factor de piso, para el piso p con columnas de igual altura,

$$FP_p = 1 / 2 \Sigma \gamma_{ij} \quad (11)$$

Rotación inicial de piso, para el piso p con columnas de igual altura,

$$RIP_p = V_p L_p / 2 \Sigma \gamma_{ij} \quad (12)$$

o lo que es lo mismo,

$$RIP_p = FP_p (V_p L_p) \quad (13)$$

Del desarrollo anterior se puede concluir que el análisis de un marco con desplazamiento lateral no restringido, puede efectuarse estimando rotaciones para sus nudos y calculando con las mismas las rotaciones de cada piso con la expresión (10), para luego estimar nuevas aproximaciones para las rotaciones en i de cada nudo, con la ayuda de la expresión (5).

A continuación se indicarán los pasos a seguir para el análisis manual de un marco de varios pisos, para pisos con columnas de igual altura en cada piso, utilizando tales expresiones.

Cálculos Iniciales.

1. Momentos de empotramiento M_{oij} y M_{oji} en cada extremo de los miembros,
2. Factores de Nudo FN_i que se anotarán en los nudos del marco.
3. Factores de Piso FP_p que se registrarán a cada lado de cada piso.

4. Rotaciones Iniciales de Nudo RIN_i ,
5. Rotaciones Iniciales de Piso RIP_P ,

Cálculos de Procedimiento.

1. Como primera aproximación para la rotación de un piso Φ_P , tómesese la rotación inicial del piso RIP_P .
2. Como primera aproximación para la rotación de un nudo Θ_i , tómesese la rotación inicial del nudo RIN_i .

Es importante destacar que en las expresiones Pendiente-Deflexión para miembros rectilíneos de sección constante $\alpha_{ij} = 4EI/L_{ij}$ y $\beta_{ij} = 2EI/L_{ij}$, por lo que si se conocen las rigideces relativas de los miembros k_{ij} , y estas podrían utilizarse, por lo que entonces $\alpha_{ij} = 2k_{ij}$.

Ejercicio Ilustrativo 1.

A continuación se resolverá el marco que se muestra en la Figura 1 tomado de la Referencia 3.

En este ejemplo se ha seguido un estricto orden de cálculo desde el nudo 1 hasta el nudo 11, con el objeto de que quien lo desee pueda seguir sin dificultad las operaciones efectuadas.

Las rotaciones de cada piso se calcularon después de determinar las rotaciones de los nudos de la primera iteración.

El cálculo de cada iteración para la rotación del nudo 1, se efectúa entonces con la expresión (5),

$$\Theta_1 = FN_1 (\Sigma \beta_{ji} \Theta_{ji} - Y_{ij} \Phi_3) + RIN_1$$

y que de manera desarrollada se escribe,

$$\Theta_1 = FN_1 (\beta_{12} \Theta_{21} + \beta_{14} \Theta_{41} - Y_{41} \Phi_3) + RIN_1$$

El cálculo de cada iteración de la Rotación de Piso 3 se efectúa con (10),

$$\Phi_3 = FP_3 [\Sigma Y_{ij} (\Theta_{ij} + \Theta_{ji})] + RIP_3$$

y que de manera desarrollada se escribe,

$$\Phi_3 = FP_3 [Y_{41} (\theta_{14} + \theta_{41}) + Y_{52} (\theta_{25} + \theta_{52}) + Y_{63} (\theta_{36} + \theta_{63})] + RIP_3$$

en la que para la primera iteración se pueden usar las Rotaciones Iniciales de Nudo correspondientes.

Así por ejemplo, para la primera iteración de Rotación de Piso del último piso,

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= +0.5556 \times [(+0.21+0.20) \times 0.3 + (+2.01+1.03) \times 0.3 \\ &+ (-5.44+0.24) \times 0.3] + 0.00 \\ &= -0.2917 \end{aligned}$$

y para la segunda iteración del nudo 1,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -0.3125 \times [(+2.01 \times 1.5 + 0.20 \times 0.1 - (-0.2917 \times 0.3))] + 0.75 \\ &= -0.23 \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

En la Figura 2 se muestra el proceso completo de los cálculos efectuados.

Los momentos finales pueden entonces ser calculados, para el nudo 1 con las ecuaciones (2) y (1) respectivamente,

$$\begin{aligned} M_{12} &= 2 \times 1.5 \times (-0.41) + 1.5 \times 2.40 - 2.40 \\ &= -0.03 \text{ ton-mt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{14} &= 2 \times 0.1 \times (-0.41) + 0.1 \times 0.19 - (-0.43) \times 0.3 \\ &= +0.07 \text{ ton-mt.} \end{aligned}$$

y así sucesivamente para los demás miembros.

A continuación se procederá a la determinación de los desplazamientos laterales de los tres pisos, lo que proporcionará información adicional sobre el comportamiento del marco analizado.

Para efectuar lo anterior es conveniente recordar que los momentos de empotramiento y las rotaciones iniciales de piso fueron calculados utilizando toneladas y metros en las unidades. También debe considerarse que,

$$\Phi_P = \Phi_{ij} = \delta_{ij} / L_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \Phi_P L_{ij}$$

por lo que considerando que las rigideces β_{ji} que se emplearon fueron n/L_{ij} (en donde n es una constante proporcional a las rigideces reales del miembro e I_0 es el momento de inercia base que se ha considerado) en lugar de $2EI_0/L_{ij}$, las rotaciones obtenidas son $2EI_0$ veces las reales, por lo que,

$$\Phi_{real} = \Phi_{calculado} / 2EI_0 \quad (14)$$

Deberá notarse además que los desplazamientos determinados son desplazamientos relativos de piso a piso.

Columnas Articuladas en la Base.

De manera similar a lo que ocurre con los métodos de Kani o Takabeya, la rapidez de convergencia del proceso iterativo, depende en gran medida de la relación de rigideces entre las vigas y columnas. Así por ejemplo, cuando se tienen columnas muy rígidas con respecto a las vigas, la convergencia se torna más lenta por lo que se requiere efectuar un mayor número de ciclos de cálculo.

Otro de los casos de convergencia lenta lo constituye el marco con columnas articuladas en la base.

En tal situación se hace posible acelerar el proceso iterativo y al mismo tiempo reducir la cantidad de nudos en donde se requiere efectuar iteraciones, lo que se logra con el empleo de un artificio analítico, como se ilustrará a continuación.

Se puede demostrar fácilmente que una columna articulada puede ser sustituida por una columna hipotética (de sección constante o variable) que posea las siguientes características:

constante alfa modificada,

$$\begin{aligned}
(\alpha_{ij})' &= \alpha_{ij} - \beta_{ji}^2 / \alpha_{ij} \\
(\beta_{ji})' &= 0 \\
(\gamma_{ij})' &= \gamma_{ij} - \beta_{ji} - \frac{\beta_{ji}^2}{\alpha_{ij}} \quad (15)
\end{aligned}$$

Lo anterior permite utilizar un artificio con el objeto de evitar tener que efectuar la iteración en la articulación de una columna.

$$\begin{aligned}
(\alpha_{ij})' &= 3EI / L_{ij} \\
(\beta_{ji})' &= 0 \\
(\gamma_{ij})' &= 3EI / L_{ij} \quad (16)
\end{aligned}$$

Conclusiones.

Como se ha observado, el método que se ha diseñado posee las siguientes características:

1. Es un método exacto
2. De aproximaciones sucesivas
3. Autocorrectivo
4. De rápida convergencia.
5. Permite comprender claramente el fenómeno físico.
6. El procedimiento numérico es fácil de recordar.
7. Se requieren efectuar muy pocas operaciones en la hoja de cálculo.
8. Únicamente se requiere efectuar una iteración por nudo.
9. Únicamente se requiere efectuar una iteración por piso.

Aunque en este trabajo no se incluyen otros casos por demás interesantes y útiles, en la Referencia 1 se presenta la aplicación del método a marcos con miembros de sección variable, miembros con diagonales y se resuelve el problema interacción marco-muro, entre otros. En el segundo caso indicado se incluye la deformación por carga axial, y en el tercero la deformación por cortante. Se incluye asimismo un desarrollo matricial que no requiere la inversión de matrices, lo que hace que este método sea más rápido y más eficiente en el uso de memoria de máquina, que los métodos matriciales tradicionales.

Referencias Bibliográficas.

1. Distribución de Rotaciones; Un Nuevo Método para el Análisis de Vigas Continuas y Marcos de Varios Pisos; 300 pags; Jorge A. Rodríguez-Deras; El Salvador, Diciembre de 1988. Pendiente de publicación.
2. Arches, Continuous Frames, Columns and Conduits; Selected papers of Hardy Cross; University of Illinois Press, Urbana; 1963.
3. Cálculo de Pórticos de Varios Pisos; G. Kani; Editorial Reverté, S.A.; Barcelona - Buenos Aires - México; MCMLVIII.
4. Estructuras de Varios Pisos; Cálculo y Tablas de Momentos; Takabeya F.; México, Continental 1982.

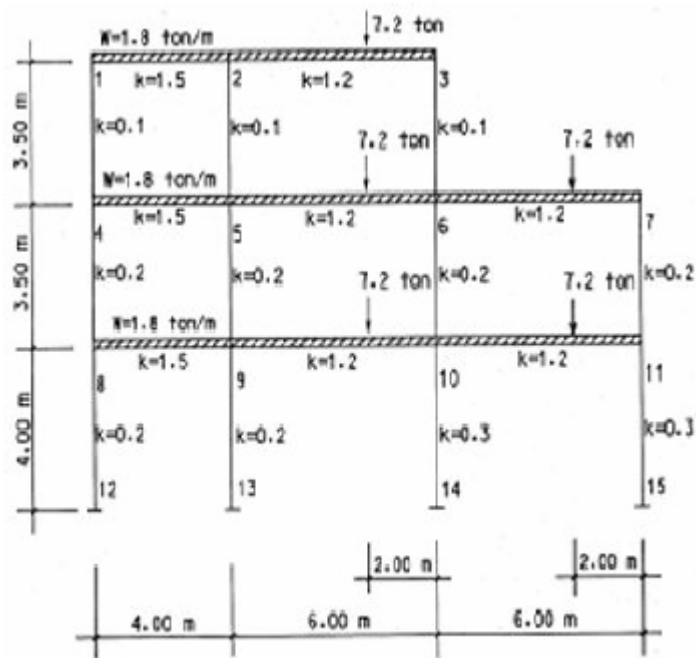


FIGURA 1

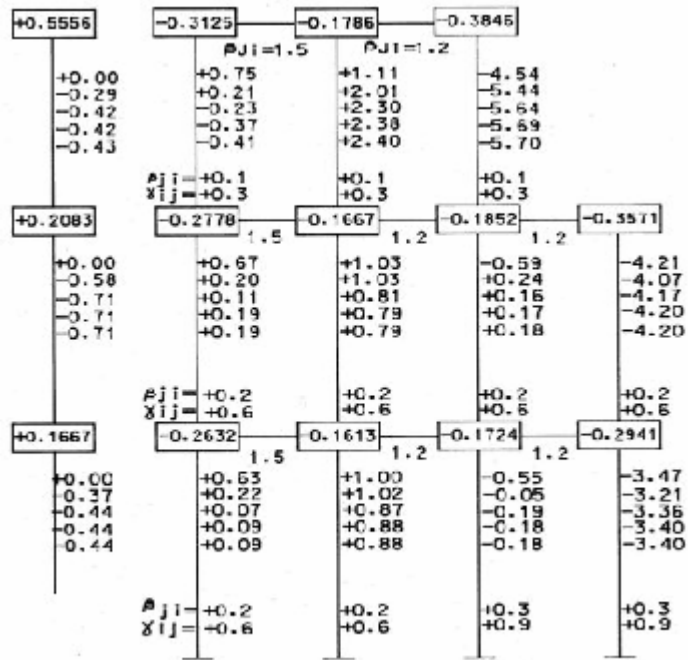


FIGURA 2

[Pagina principal](#)

E-mail: uidv.contacto@mop.gob.sv